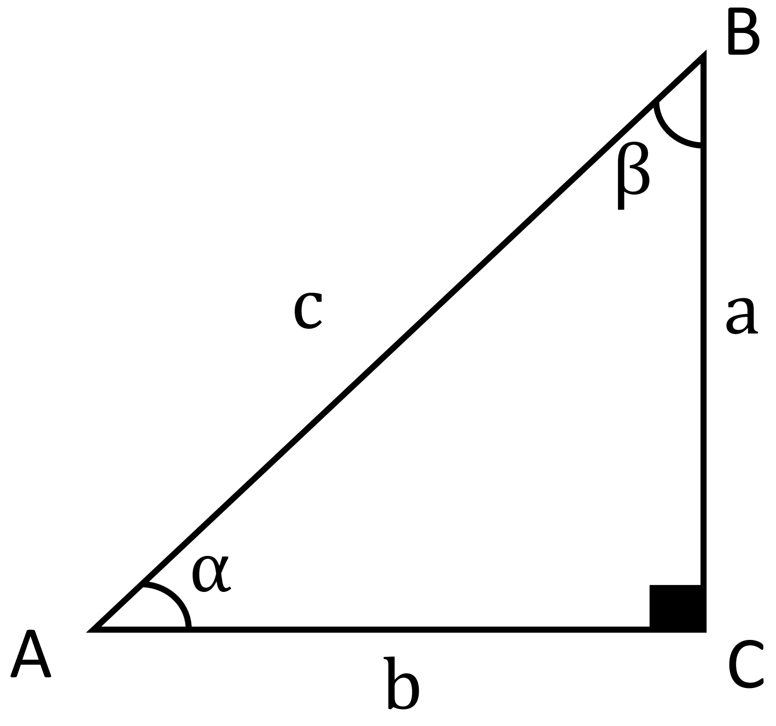
Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

PITAGORAS ACADEMIA

TRIGONOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

1.-TRIÁNGULO RECTÁNGULO



- ✓ A,B y C: vértices
- ✓ a y b : catetos
- ✓ c : hipotenusa
  - $c > a \wedge c > b$
- ✓ α y β: ángulos agudos
  - $0 < \alpha \wedge \beta < 90°$
- ✓ α y β: ángulos complementarios
  - $\alpha + \beta = 90°$

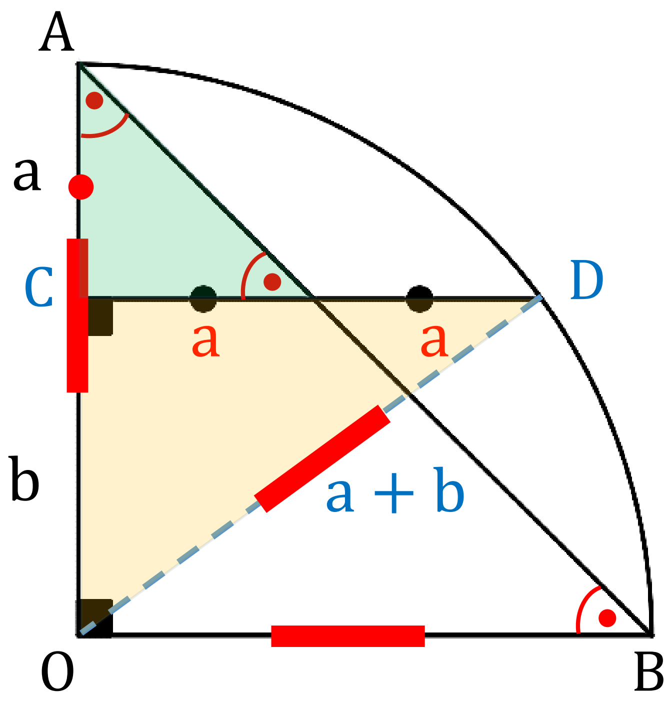
➢ TEOREMA DE PITÁGORAS

$$c^2 = a^2 + b^2$$

1.1-Problema adicional

Hallar la relación entre a y b, del grafico mostrado, si se sabe AOB es un cuadrante.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ ~~E)~~ $\frac{2}{3}$

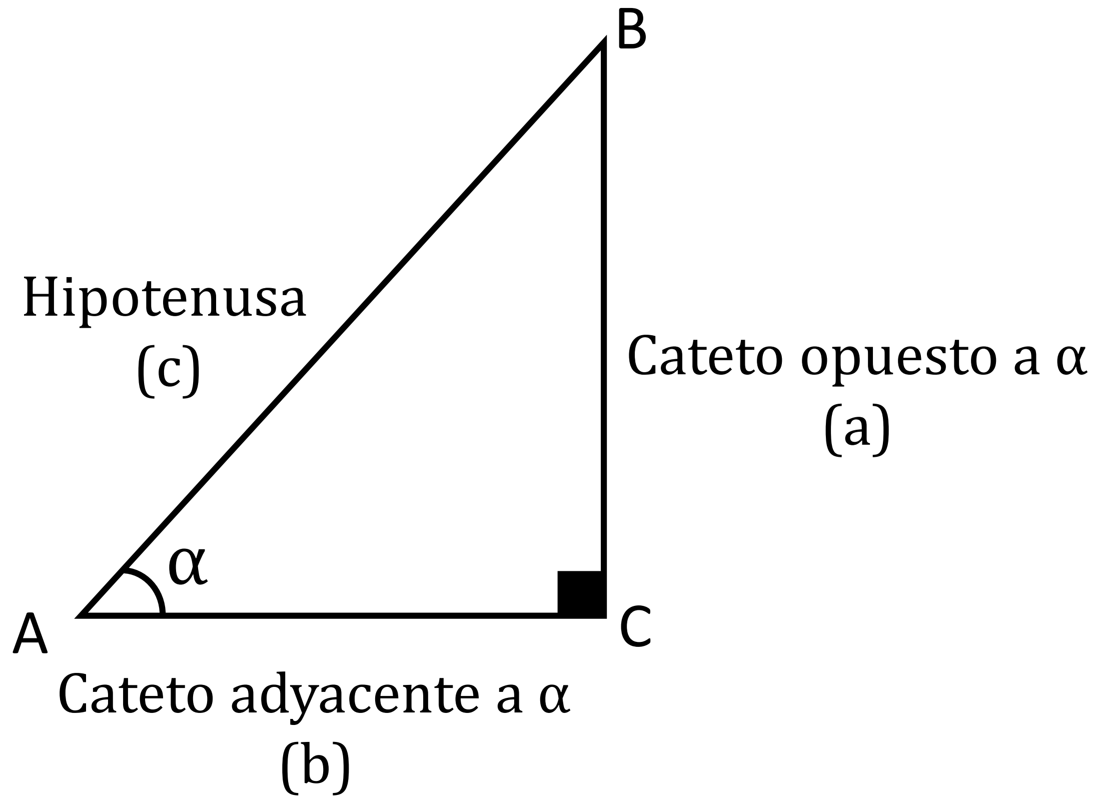


i. En el $\triangle$OCD:

- Por el Teorema de Pitágoras:

$$(a+b)^2 = (2a)^2 + b^2$$
$$a^2 + 2ab + \cancel{b^2} = 4a^2 + \cancel{b^2}$$
$$2\cancel{a}b = 3\cancel{a^2}$$
$$2b = 3a$$
$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{a}{b}$$

2.-RAZÓN TRIGONOMÉTRICA



- Seno : $\text{Sen}\,\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto a }\alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
- Coseno : $\text{Cos}\,\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente a }\alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
- Tangente : $\text{Tan}\,\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto a }\alpha}{\text{Cateto adyacente a }\alpha} = \dfrac{a}{b}$
- Cotangente: $\text{Cot}\,\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente a }\alpha}{\text{Cateto opuesto a }\alpha} = \dfrac{b}{a}$
- Secante : $\text{Sec}\,\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a }\alpha} = \dfrac{c}{b}$
- Cosecante : $\text{Csc}\,\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a }\alpha} = \dfrac{c}{a}$

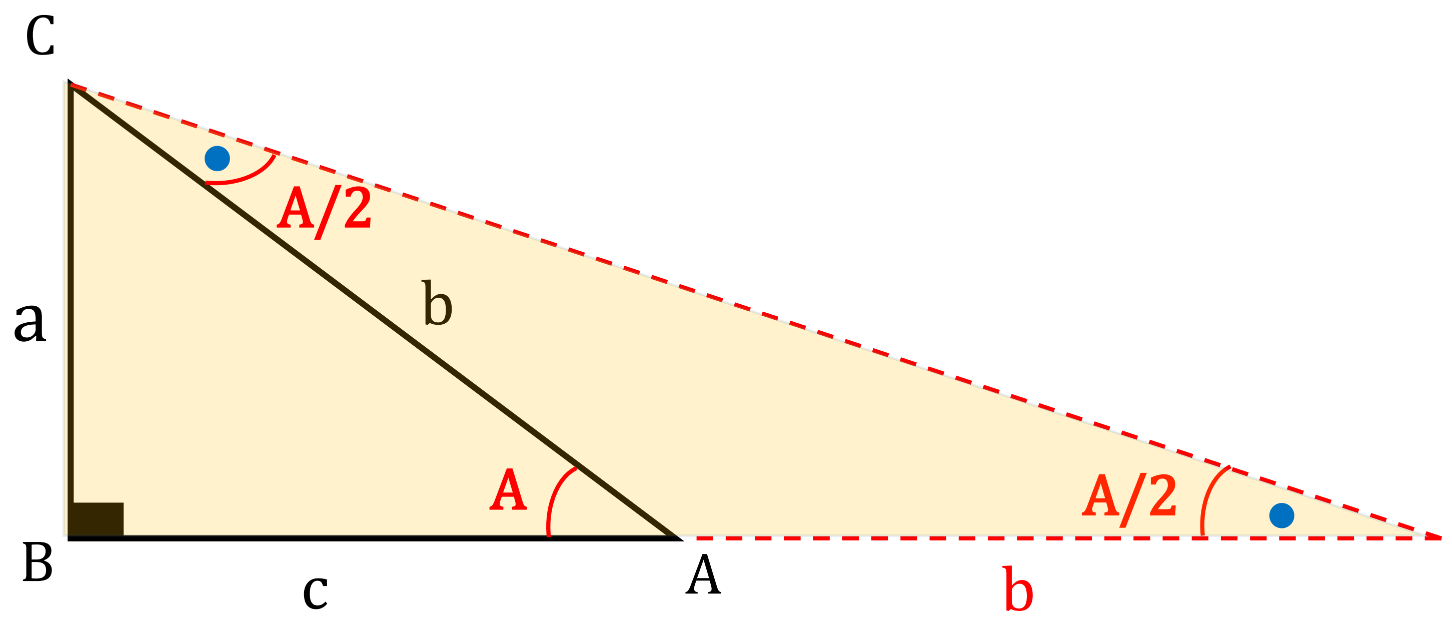
❖ OBSERVACIÓN 1

✓ Para un ángulo agudo, se cumple:

- $0 < \text{Sen}\alpha < 1$
- $0 < \text{Cos}\alpha < 1$
- $0 < \text{Tan}\alpha$
- $0 < \text{Cot}\alpha$
- $1 < \text{Sec}\alpha$
- $1 < \text{Csc}\alpha$

❖ OBSERVACIÓN 2

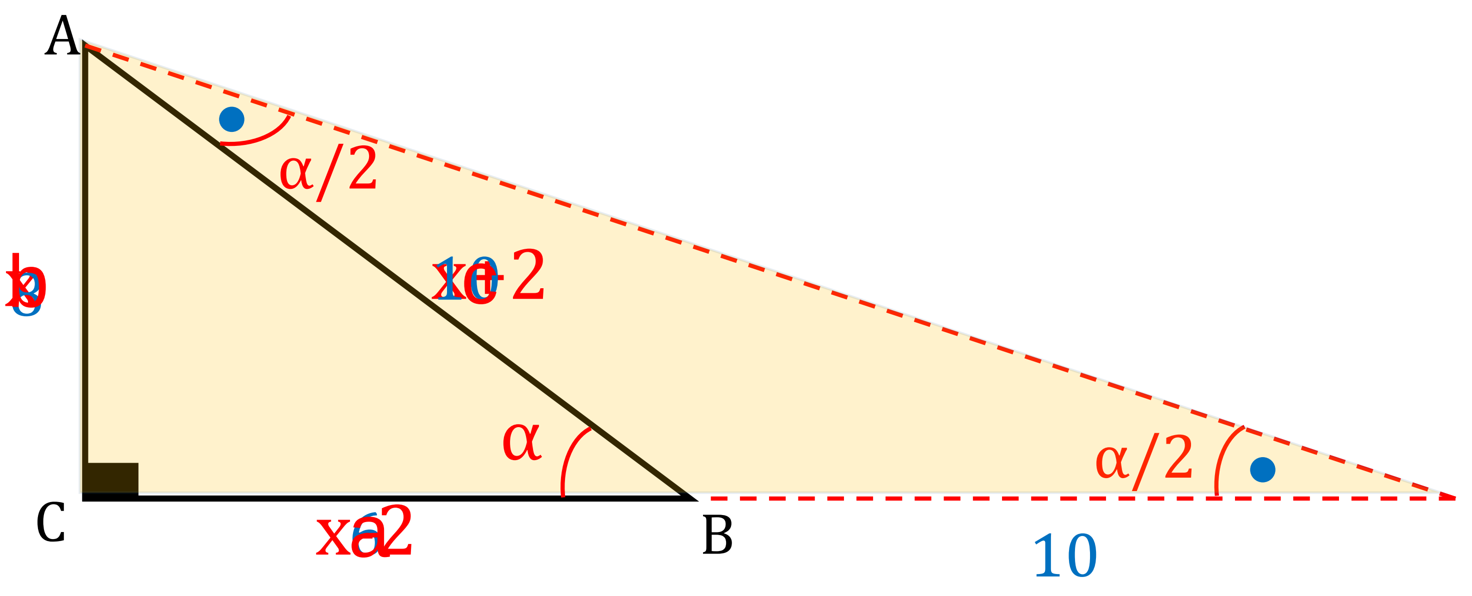
- $\text{R.T.}\left(\frac{A}{2}\right)$



2.1-Problema adicional

Las medidas de los lados de un triangulo rectángulo ABC son a metros, b metros y c metros siendo a , b y c números pares consecutivos. Calcular Cot $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, si α es el mayor ángulo agudo.

A) $\frac{3}{2}$ ~~B)~~ 2   C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{4}{3}$



i. De la condición:

a=x-2 , b= x y c=x+2

ii. Por el teorema de Pitágoras

$$(x+2)^2 = (x-2)^2 + x^2$$

$$4x.2 = x^2$$

$$8\cancel{x} = x^{\cancel{2}} \Longrightarrow 8 = x$$

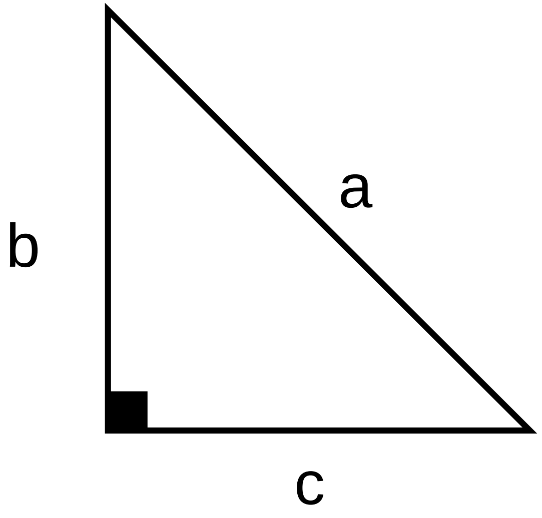
$$\therefore \text{Cot}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{16}{8}$$

$$\text{Cot}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2$$

2.2-Problema adicional

En un triangulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es al producto de los catetos como 13 es a 6. Hallar el valor de la tangente del menor ángulo.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 3 E) $\frac{4}{3}$



✓ Recordar :

- Teorema de Pitágoras

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

i. De la condición:

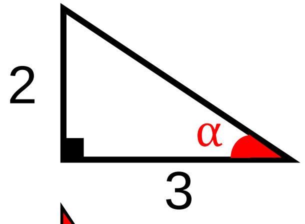
$$\frac{a^2}{bc} = \frac{13}{6} \Longrightarrow \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{13}{6} \Longrightarrow 6b^2 + 6c^2 = 13bc$$

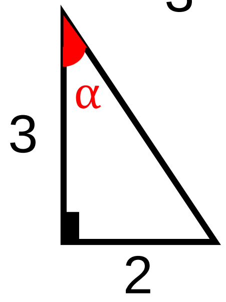
$$\Longrightarrow 6b^2 - 13bc + 6c^2 = 0$$

$$\begin{array}{ll} 3b & -2c \\ 2b & -3c \end{array}$$

3b-2c=0 ∨ 2b-3c=0

$$\frac{b}{c} = \frac{2}{3} \quad \vee \quad \frac{b}{c} = \frac{3}{2}$$



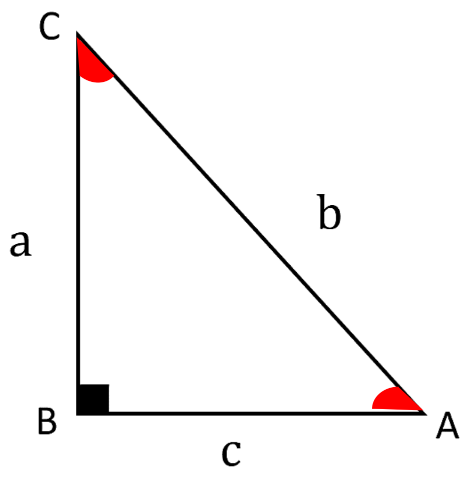


$$\therefore \text{Tan}\alpha = \frac{2}{3}$$

2.3-Ejemplo:

1)En un triangulo rectángulo ABC (recto en B),si: $\mathrm{TanA.CosC} = 3$

Calcule el valor de: $\sqrt{\mathrm{Sec}^2\mathrm{A} - 3\mathrm{CscC}}$



- $\mathrm{TanA.CosC} = 3$

$$\frac{a}{c} \times \frac{a}{b} = 3 \Longrightarrow \frac{a^2}{cb} = 3 \Longrightarrow a^2 = 3bc \Longrightarrow \boxed{b^2 - c^2 = 3bc}$$

- Piden: $\sqrt{\mathrm{Sec}^2\mathrm{A} - 3\mathrm{CscC}}$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{c}\right)} \Longrightarrow \sqrt{\frac{b^2}{c^2} - \frac{3b}{c}} \Longrightarrow$$

- Por el Teorema de Pitágoras:

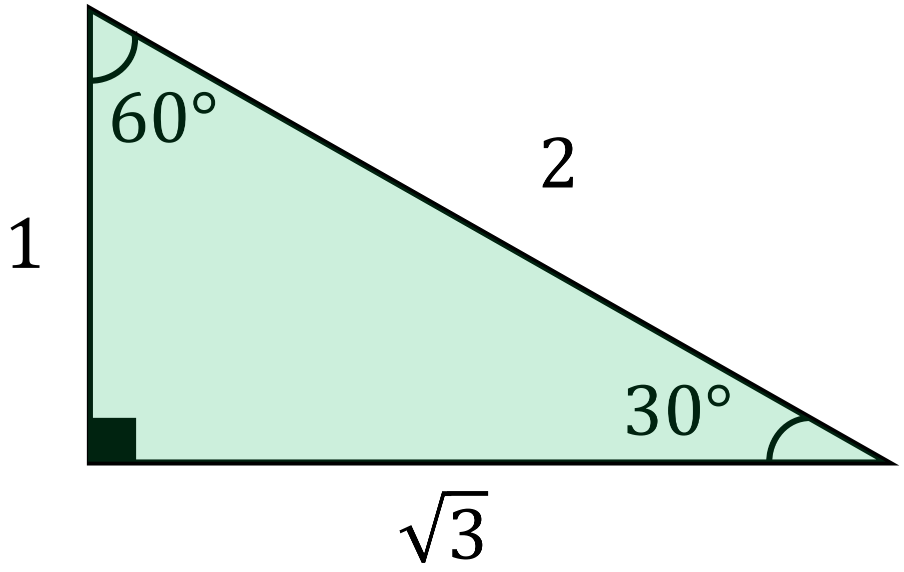
$$b^2 = a^2 + c^2 \Longrightarrow \boxed{b^2 - c^2 = a^2}$$

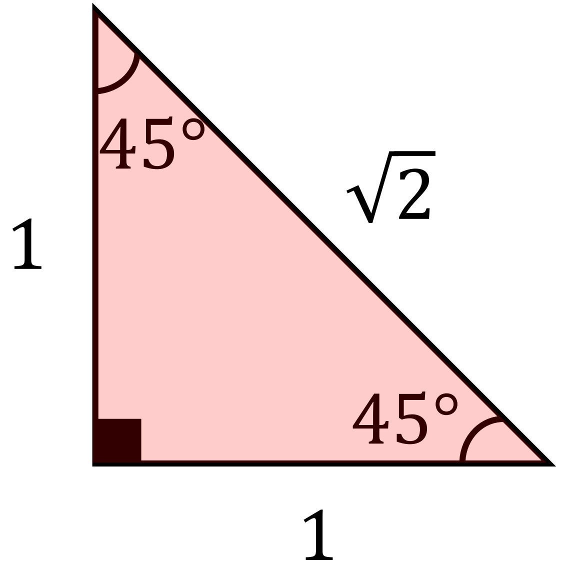
- Del dato: $\frac{b^2}{c^2} - \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{c^2}} = \frac{3b\cancel{c}}{\cancel{c^2}} \Longrightarrow \frac{b^2}{c^2} - 1 = \frac{3b}{c} \Longrightarrow \frac{b^2}{c^2} - \frac{3b}{c} = 1$

CLAVE: A

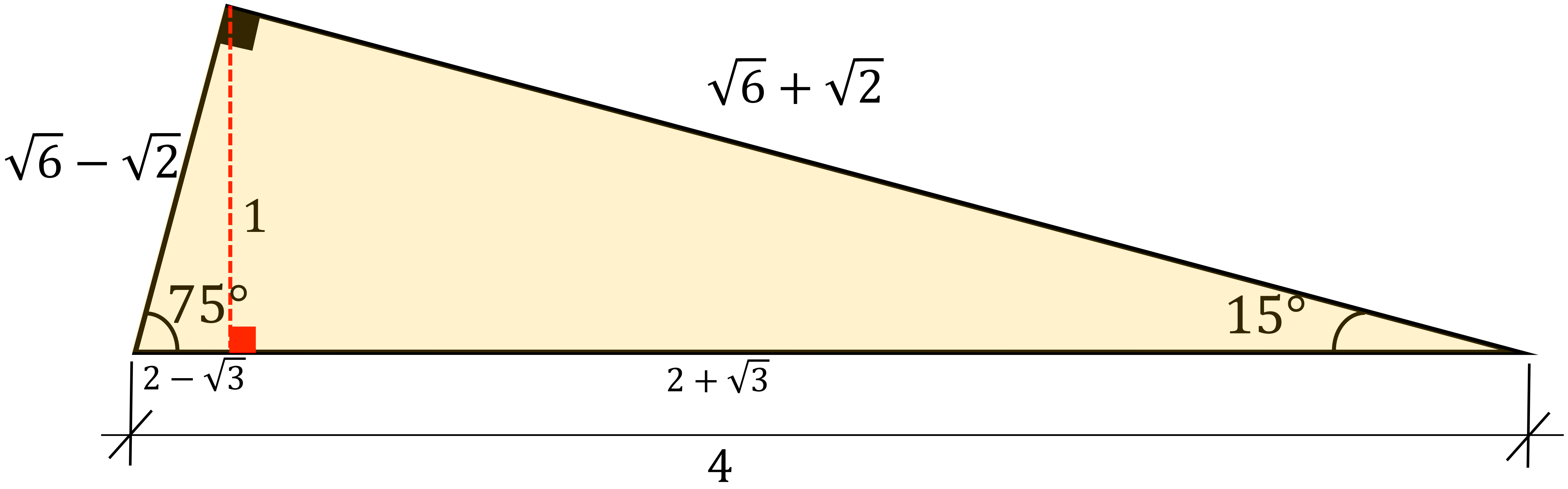
3.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ANGULOS NOTABLES Y APROXIMADOS

3.1-Triángulos rectángulos notables:



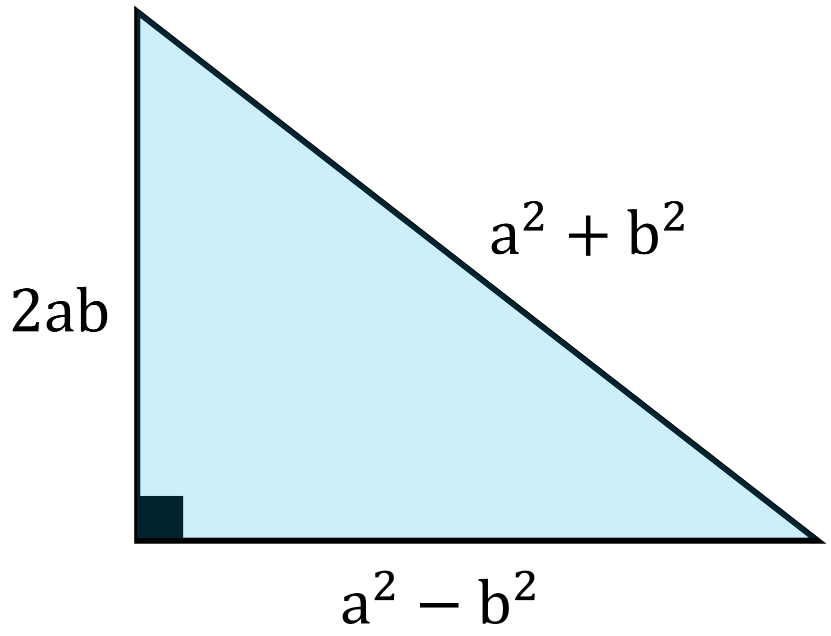


❖ OBSERVACIÓN



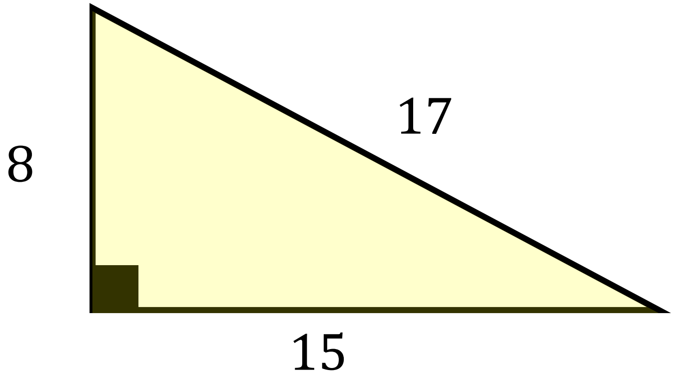
3.2-Triángulos Pitagóricos :

✓General:



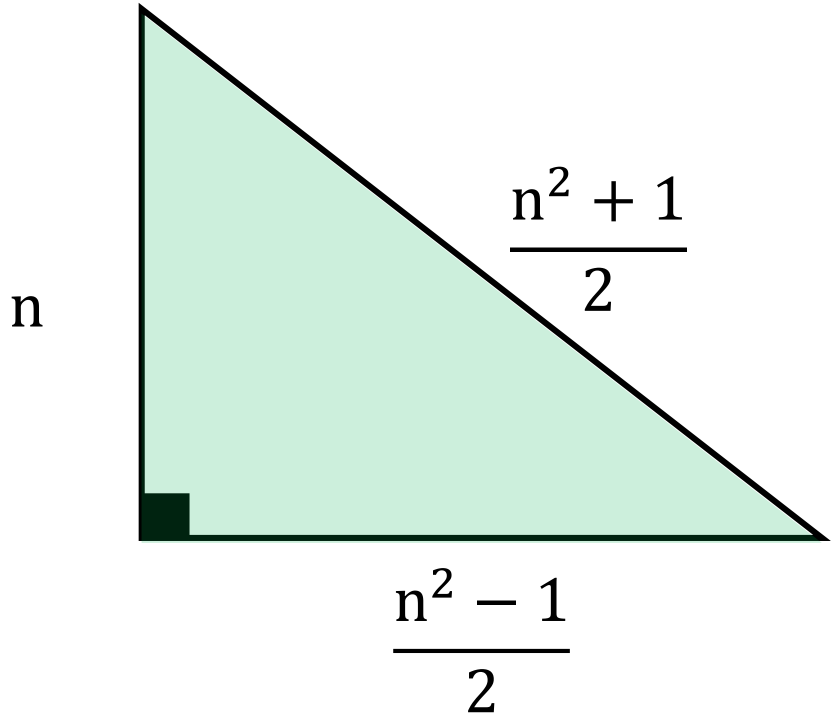
- $a > b$
- $a \wedge b \in \mathbb{Z}$

- Si: $a = 4$ y b=1



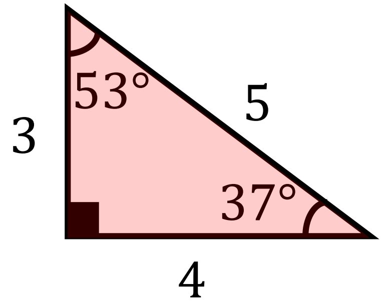
3.2-Triángulos Pitagóricos :

✓Particular:

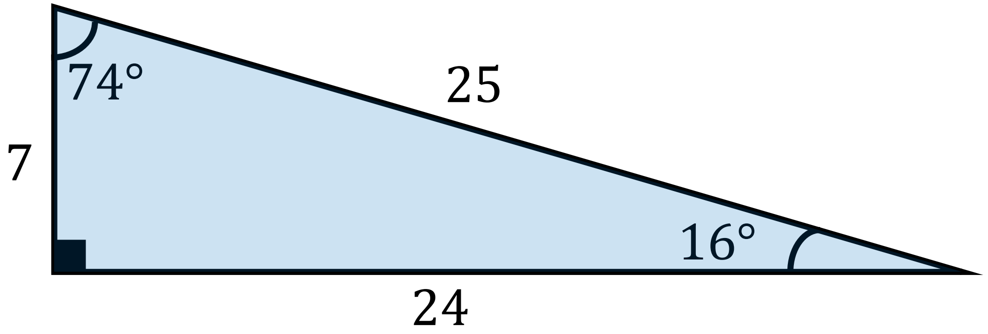


- n: impar
- $n > 1$

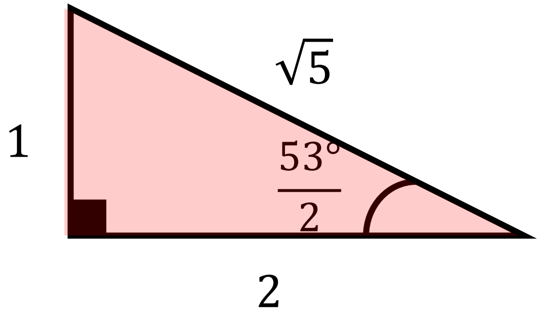
- Si: $n = 3$

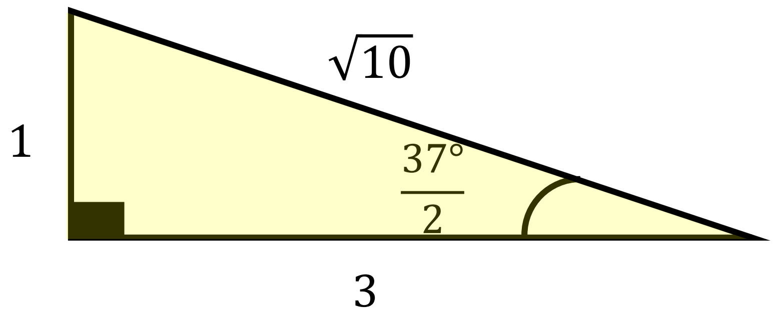


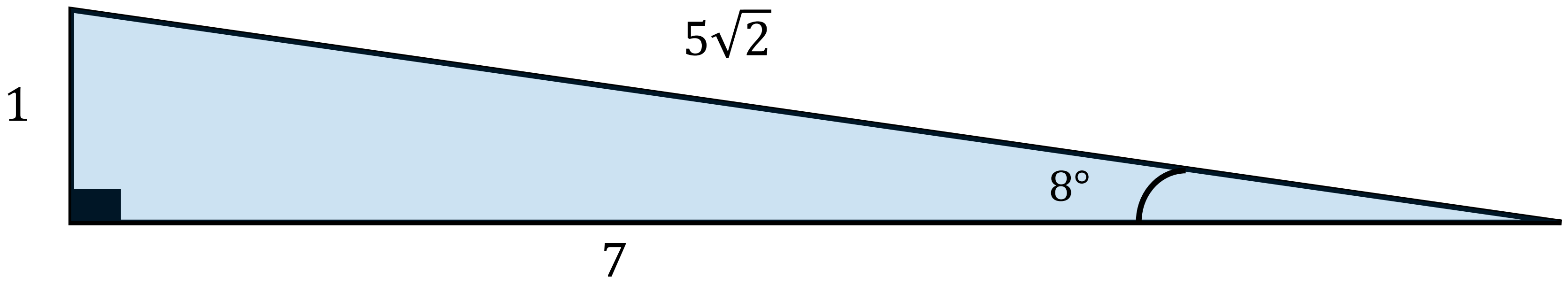
- Si: $n = 7$



❖ OBSERVACIÓN

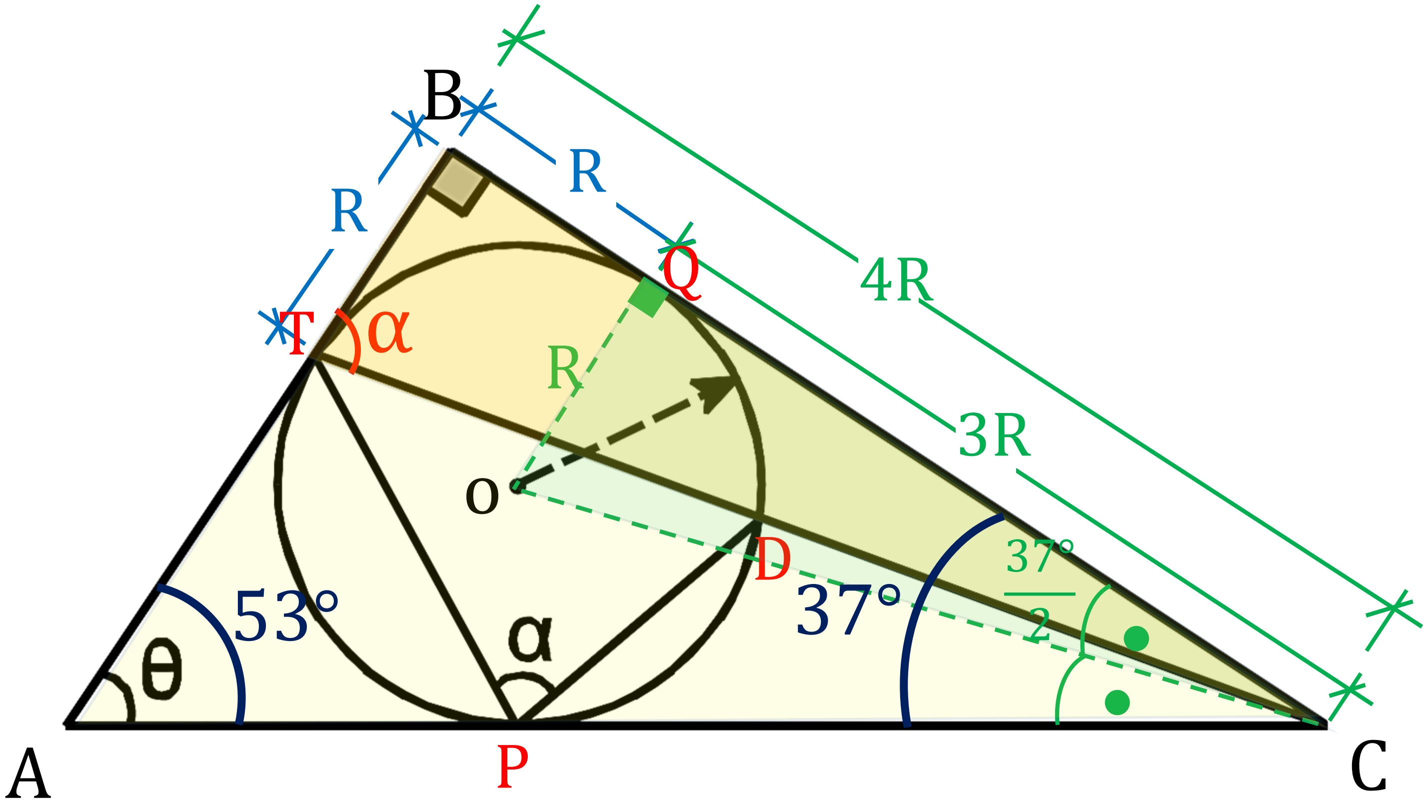






3.3-Ejemplo:

2)Si $\text{Tan}\alpha = 4$, calcular $\text{Tan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ del grafico mostrado.



CLAVE: C

✓ De la figura:

- $\overset{\frown}{TD} = 2\alpha \Longrightarrow \measuredangle BTC = \alpha$
- $\overline{TB} = \overline{BQ} = R$

✓ Dato: $\text{Tan}\alpha = 4$

- En el ⊿CBT:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{TB}} = 4 \Longrightarrow \frac{\overline{BC}}{R} = 4 \Longrightarrow \overline{BC} = 4R$$

✓ De la figura:

- $QC = 3R$
- OC: Bisectriz

$\Longrightarrow$ En el ⊿OQC: $\measuredangle QCO = \frac{37°}{2}$

$\Longrightarrow \measuredangle C = 37°$

$$\Longrightarrow \therefore \theta = 53° \Longrightarrow \text{Tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Longrightarrow \text{Tan}\left(\frac{53°}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

4.- PROPIEDADES DE LAS R.T.

4.1-Propiedad de las Co-Razones :

- Si:

Senx=Cosy
Tanx=Coty
Secx=Cscy

Entonces:

$$\boxed{x+y=90°}$$

- $\boxed{R.T.(\theta) = CO - R.T.(90° - \theta)}$

$$Sen\theta = Cos(90° - \theta)$$

$$Tan\theta = Cot(90° - \theta)$$

$$Sec\theta = Csc\,(90° - \theta)$$

4.2-Propiedad de las Recíprocas :

- Si:

$$\mathrm{Senx.Cscy} = 1$$
$$\mathrm{Cosx.Secy} = 1$$
$$\mathrm{Tanx.Coty} = 1$$

Entonces:

$$\boxed{x = y}$$

- $\mathrm{Sen\theta.Csc\theta} = 1 \begin{cases} \mathrm{Sen\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{Csc\theta}} \\ \mathrm{Csc\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{Sen\theta}} \end{cases}$

- $\mathrm{Cos\theta.Sec\theta} = 1 \begin{cases} \mathrm{Cos\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{Sec\theta}} \\ \mathrm{Sec\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{Cos\theta}} \end{cases}$

- $\mathrm{Tan\theta.Cot\theta} = 1 \begin{cases} \mathrm{Tan\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{Cot\theta}} \\ \mathrm{Cot\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{Tan\theta}} \end{cases}$

4.3-Ejemplo:

4)Si: $\text{Senx}.\text{Secy} = 1$; además x e y son ángulos agudos.

Calcule: $W = \text{Tan}\left(\frac{x+y}{2}\right).\text{Cot}\left(\frac{x+y}{3}\right).\text{Tanx}.\text{Tany}$

- $\text{Senx}.\text{Secy} = 1$

$$\text{Senx} = \frac{1}{\text{Secy}}$$

$$\text{Senx} = \text{Cosy}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x + y = 90°}$$

- $W = \text{Tan}\left(\frac{\overbrace{x+y}^{90°}}{2}\right).\text{Cot}\left(\frac{\overbrace{x+y}^{90°}}{3}\right).\text{Tanx}.\text{Tany}$

$$W = \text{Tan}(45°).\ \text{Cot}(30°).\ \text{Tanx}.\ \text{Cotx}$$

$$W = 1\text{x}\sqrt{3}\text{x}1$$

$$W = \sqrt{3}$$

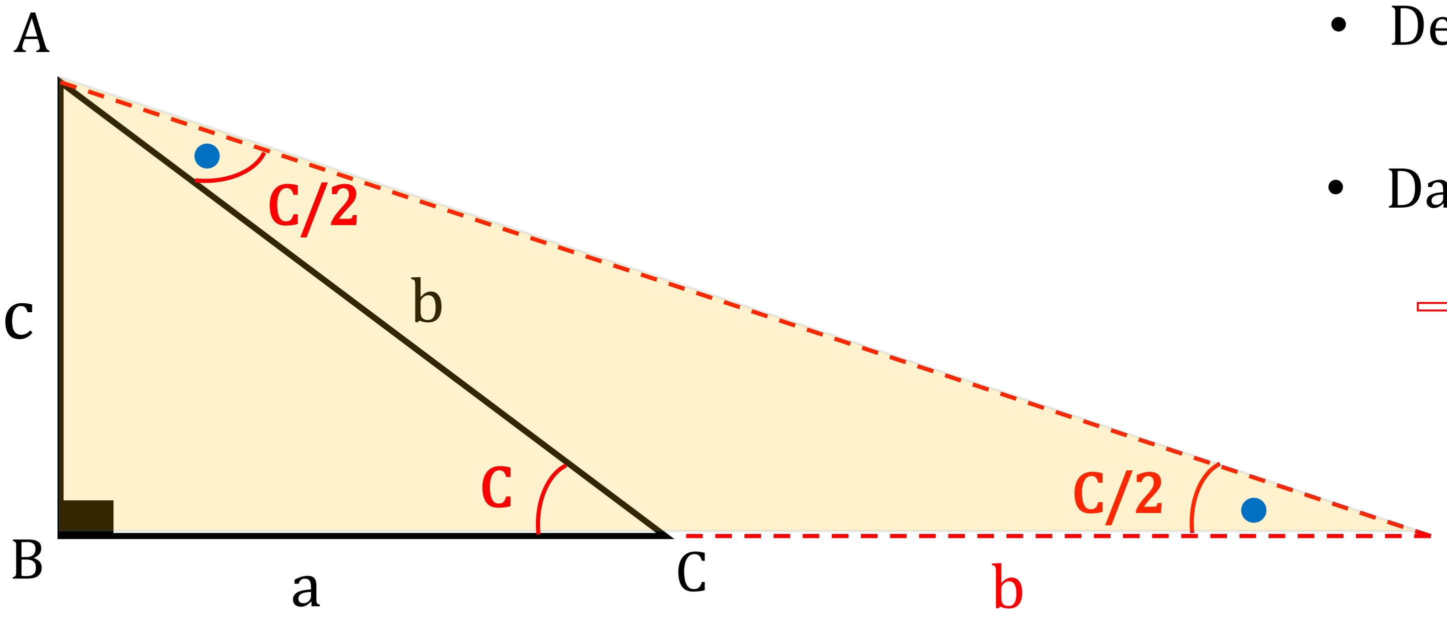
CLAVE: C

4.4-Problema adicional

De acuerdo a la figura, calcular: $2\text{Sen}(C+10°)$ $+\text{Sec}3C$, si $\text{Cot}(2C+40°)=\frac{c}{a+b}$.

Siendo $2C+40°$ un ángulo agudo.

A) 1 B) 2 ~~C)~~ 3 D) 4 E) 5



- De la figura: $\text{Tan}\frac{C}{2}=\frac{c}{a+b}$
- Dato: $\text{Cot}(2C+40°)=\frac{c}{a+b}$.

$\Longrightarrow$ $\text{Tan}\frac{C}{2}=\text{Cot}(2C+40°)$

$\frac{C}{2}+2C+40°=90°$

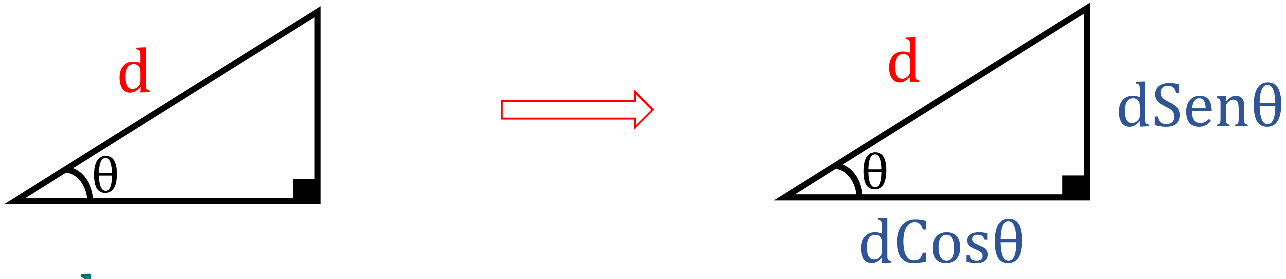
$\frac{\cancel{5}C}{2}=5\cancel{0}°$ $\Longrightarrow$ C=20°

- Piden: $2\text{Sen}(C+10°)$ $+\text{Sec}3C$

$2\text{Sen}30°+\text{Sec}60°$ $\Longrightarrow$ $\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}+\ 2\ =3$

5.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

- 1er Caso: (Hi)

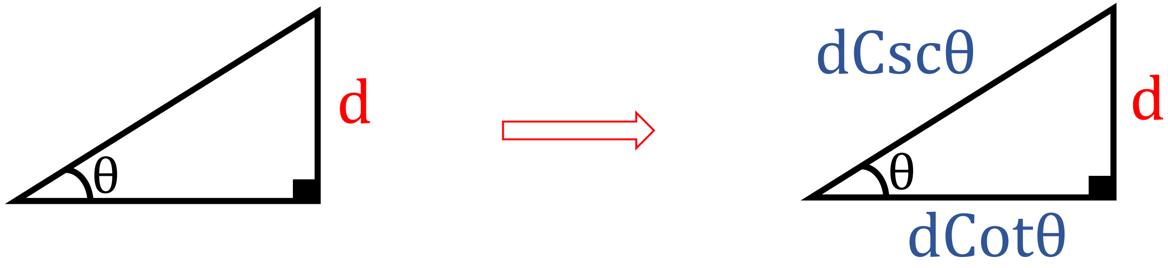


- REGLA PRÁCTICA

$$\mathrm{R.T.}(\theta) = \frac{\text{Lado que quiero}}{\text{Lado que tengo}}$$

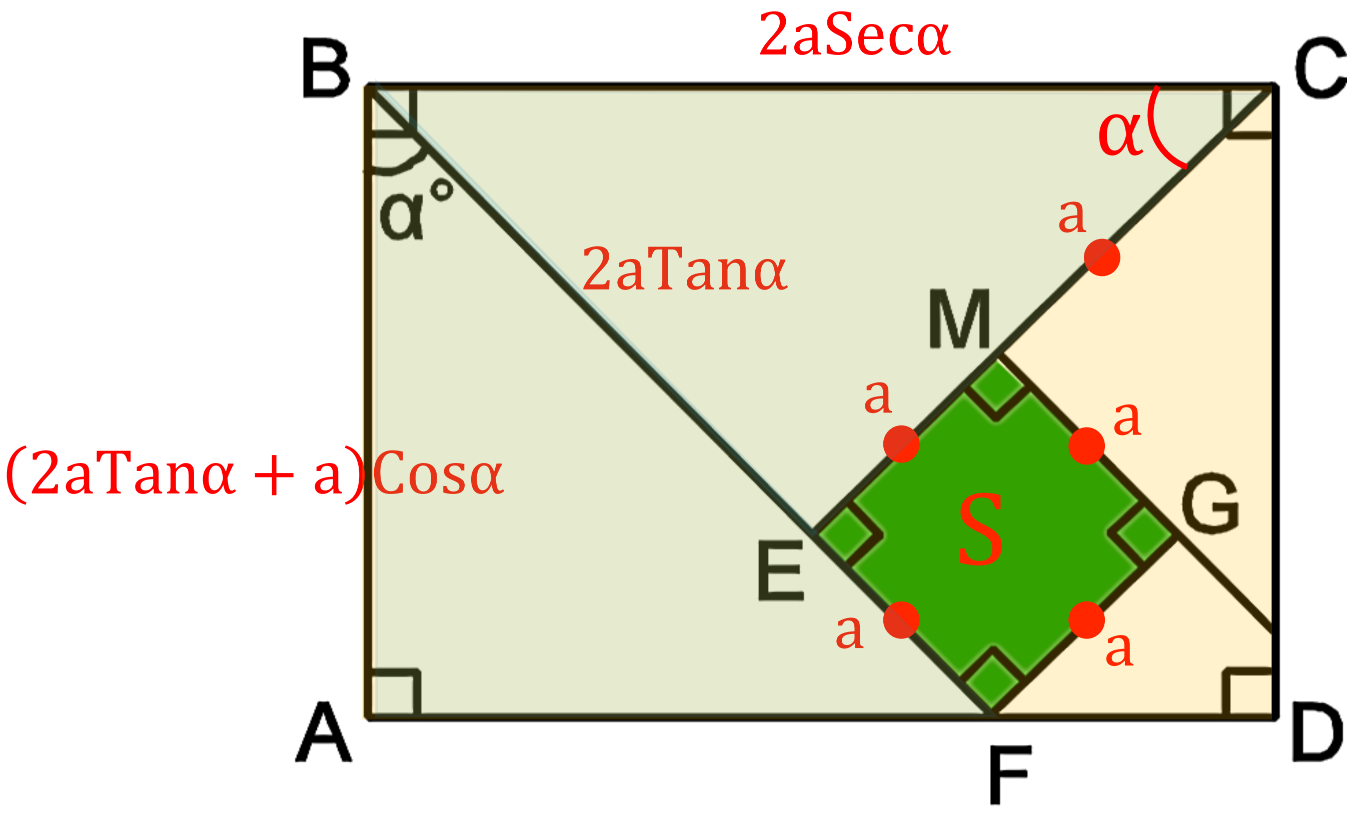
- 2do Caso: (C.A.)

- 3er Caso: (C.O.)



5.1-Ejemplo:

3)De la figura, calcule el área del rectángulo ABCD en términos de α, si el área de la región sombreada (cuadrado) es "S" , además M es punto medio de EC.



- $S_{\blacksquare\ MEFG} = S = a^2$
- Piden: S_{ABCD}

$2aSec\alpha.(2aTan\alpha + a)Cos\alpha$

$2aSec\alpha.a(2Tan\alpha + 1)Cos\alpha$

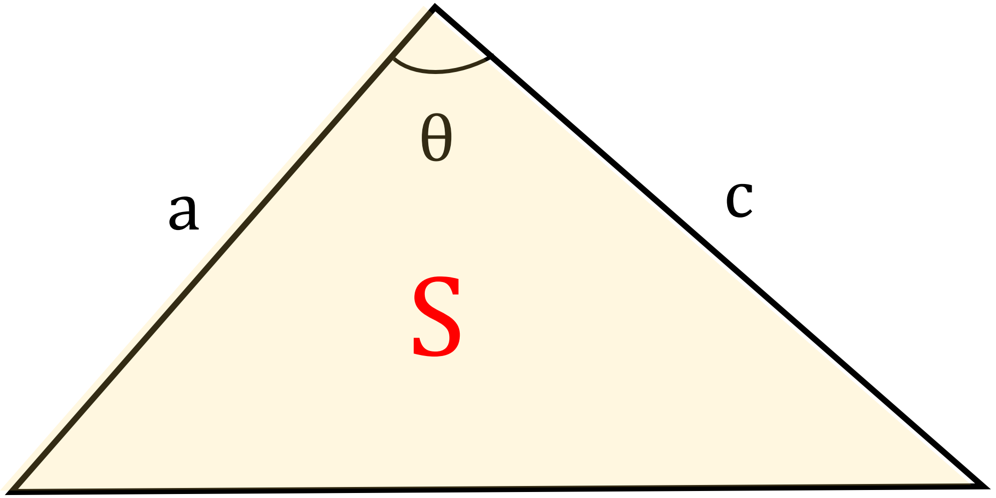
$2a^2.(2Tan\alpha + 1)$

$\therefore 2S.(2Tan\alpha + 1)$

CLAVE: D

❖ OBSERVACIÓN

- Área de un triángulo

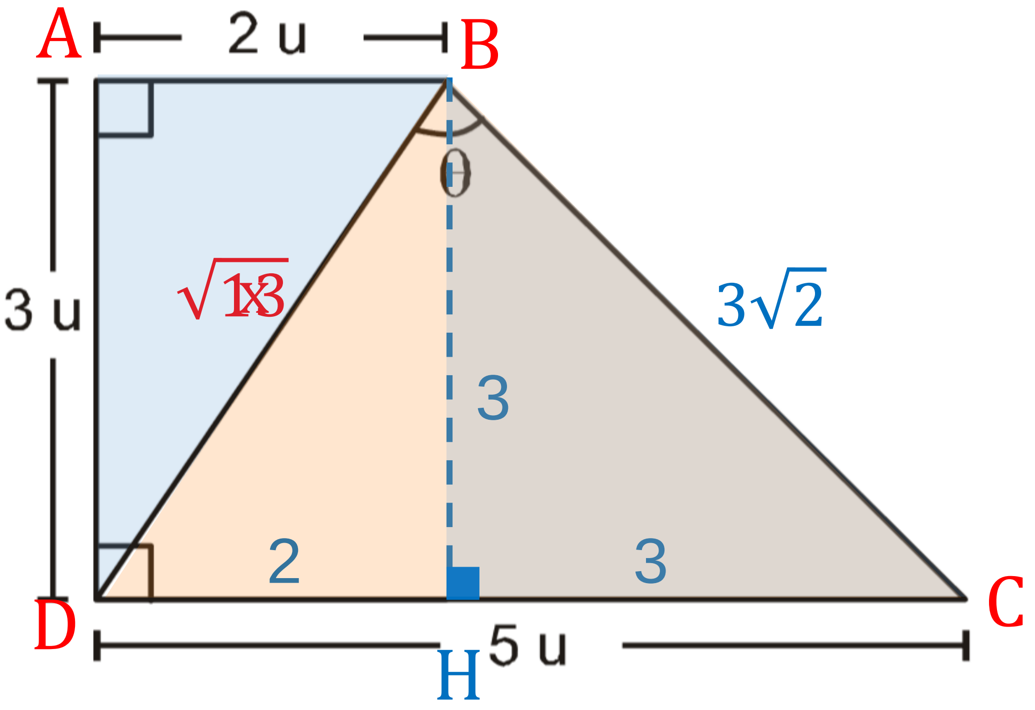


$$S = \frac{ac}{2}\operatorname{Sen}\theta$$

5.2-Problema adicional

Con los datos de la figura, calcular $\mathrm{Cot}(90° - \theta) + \mathrm{Csc}^2(90° - \theta)$

A) 29 ~~B)~~ 31 C) 27 D) 32 E) 37



i. Calcular : $\mathrm{Cot}(90° - \theta) + \mathrm{Csc}^2(90° - \theta)$

$$\mathrm{Tan}\theta + \mathrm{Sec}^2\theta \Longrightarrow 5 + \left(\frac{\sqrt{26}}{1}\right)^2 \Longrightarrow 5 + 26 = 31$$

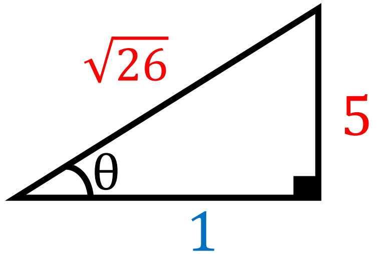
ii. En el $\triangle$BAD:

- Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 2^2 \Longrightarrow x = \sqrt{13}$$

iii. En el △ BDC:

Área por trigonometría= Área por geometría



$$\frac{\sqrt{13}.\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{2}}.\mathrm{Sen}\theta = \frac{5.\cancel{3}}{\cancel{2}}$$

$$\mathrm{Sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$$